



IES Arquitecto Ventura Rodríguez

**Cálculo analítico de los movimientos de  
Júpiter y los satélites galileanos desde la  
superficie de Europa**

Autor: Diego Márquez Morales

Tutor: Gregorio Rosa Palacios

Trabajo de Investigación

Bachillerato de Excelencia

2021-2022

### ***Agradecimientos***

*Quisiera agradecer a mi tutor, Gregorio Rosa, todo el tiempo dedicado a la realización del proyecto, así como su apoyo y guía constante durante el desarrollo del trabajo. A su vez me gustaría agradecer a todos aquellos compañeros todos los ánimos y ayudas que me han dado durante este tiempo.*

# Índice

<b>Introducción Teórica .....</b>	<b>4</b>
<b>Acercamiento .....</b>	<b>4</b>
<b>Introducción acerca de la astronomía .....</b>	<b>4</b>
<b>Europa:.....</b>	<b>5</b>
<b>Júpiter: .....</b>	<b>5</b>
<b>Satélites Galileanos: .....</b>	<b>6</b>
<b>Altura y acimut: .....</b>	<b>7</b>
<b>Sir Isaac Newton.....</b>	<b>7</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>8</b>
<b>Objetivo.....</b>	<b>9</b>
<b>Descripción de la metodología: .....</b>	<b>9</b>
<b>Órbita: .....</b>	<b>9</b>
<b>Rotación de un punto de la superficie: .....</b>	<b>9</b>
<b>Altura del cuerpo observado: .....</b>	<b>9</b>
<b>Desarrollo: .....</b>	<b>10</b>
<b>Fuerza.....</b>	<b>11</b>
<b>Aceleración.....</b>	<b>12</b>
<b>Velocidad.....</b>	<b>13</b>
<b>Posición.....</b>	<b>14</b>
<b>Ángulo (<math>\alpha</math>).....</b>	<b>15</b>
<b>Puntos de la superficie .....</b>	<b>16</b>
<b>Altitud y acimut.....</b>	<b>18</b>
<b>Resultados y conclusiones: .....</b>	<b>20</b>
<b>Bibliografía: .....</b>	<b>24</b>

# Introducción Teórica

## Acercamiento

El cálculo analítico de órbitas planetarias comienza en el siglo XVII con las aportaciones de Kepler y Newton. Desde ese momento los físicos comenzaron a calcular las órbitas de los planetas. En el siglo XIX Le Verrier, un matemático francés especializado en mecánica celeste predijo (al mismo tiempo que John Couch Adams) el movimiento del planeta Neptuno desconociendo su existencia a partir de las matemáticas y los datos observados de los demás planetas. Otro de los grandes ejemplos del cálculo analítico de órbitas es el problema de la órbita de Mercurio, el cual fue resuelto por Albert Einstein abriendo la puerta de la relatividad y logrando así uno de los mayores avances de la física moderna. En un nivel más bajo, propio del Bachillerato de Investigación, se han llevado a cabo trabajos como el de Álvaro Morales titulado “El Cielo de la Luna” en el que aplica estos cálculos matemáticos para realizar una simulación mediante realidad virtual del movimiento de la Tierra y el Sol desde la Luna.

## Introducción acerca de la astronomía

La astronomía es la ciencia que estudia los cuerpos celestes del universo, lo que incluye estrellas, planetas, satélites etc. La astronomía ha estado ligada al ser humano desde la antigüedad, siendo practicada por todas las civilizaciones, sin embargo, hasta el siglo XVII no se empezó a desarrollar la metodología científica. El tratamiento matemático de la astronomía comienza con el desarrollo de la mecánica celeste (Copérnico, *De Revolutionibus orbium coelestium* 1543) (Johannes Kepler, *Astronomia nova* 1609) y las leyes de gravitación Newtonianas. A partir del cálculo matemático hemos sido capaces de predecir los movimientos de cada uno de los cuerpos estelares (Henri Poincaré 1854-1912) y comprobar experimentalmente la veracidad de nuestros cálculos. Hablo por supuesto de la observación astronómica. La observación se ha practicado usualmente desde la tierra, aunque se ha podido practicar también desde algunos objetos enviados al espacio como la sonda Cassini Huygens o el telescopio Hubble. En este proyecto se han aplicado los cálculos pertinentes para analizar matemáticamente los movimientos de ciertos cuerpos estelares desde la superficie de Europa, uno de los 4 satélites galileanos de Júpiter.

**Europa:**

Europa, descubierta en 1610 por el famoso astrónomo Galileo Galilei es el satélite más pequeño de los galileanos. El satélite cuenta con las siguientes características:

- Radio orbital perihelio:  $6,71 \cdot 10^8$  metros
- Velocidad orbital perihelio:  $1,37 \cdot 10^4$  metros/segundo
- Masa:  $4,8 \cdot 10^{22}$  kilogramos
- Periodo orbital:  $3,07 \cdot 10^5$  segundos
- Radio:  $1,56 \cdot 10^6$  metros

Pero sin duda su característica más destacable y una de las razones por las que elegí Europa para protagonizar este proyecto, es su geología, la cual sugiere la posibilidad de que exista agua bajo su superficie, lo que a su vez sugiere la posibilidad de que pueda albergar vida.

**Júpiter:**

Júpiter es el planeta más grande del sistema solar y el quinto más lejano al Sol. Se trata de un gigante gaseoso que es observable desde la tierra siendo uno de los objetos más brillantes del cielo nocturno. Júpiter, al igual que Saturno, es ricos en satélites naturales, en concreto tienen 79 y 82 respectivamente. Júpiter cumple una función imprescindible en el sistema solar, la de evitar la colisión de asteroides desviándolos de un posible rumbo de colisión a la Tierra gracias a su enorme campo gravitatorio. Júpiter cuenta con las siguientes características:

- Radio Orbital:  $7,78 \cdot 10^{11}$  metros
- Velocidad Orbital:  $1,31 \cdot 4$  metros/segundo
- Masa:  $1,9 \cdot 27$  kilogramos
- Periodo Orbital:  $9,29 \cdot 10^8$  segundos
- Radio:  $6,9 \cdot 10^6$  metros

### **Satélites Galileanos:**

Los satélites Galileanos son los 4 satélites mas grandes de Júpiter. Reciben este nombre debido a su descubrimiento por parte de Galileo Galilei en 1610. En orden creciente son: Ío, Europa, Ganímedes y Calisto. Los 3 primeros satélites presentan la denominada resonancia de Laplace, que quiere decir que, por cada vuelta de Ganímedes, Europa realiza 2 y por cada vuelta de Europa, Ío realiza otras 2 vueltas. Estos satélites presentan los siguientes datos astronómicos:

- Radio orbital perihelio (Ío):  $4,2 \cdot 10^8$  metros
- Velocidad Orbital perihelio (Ío):  $1,74 \cdot 10^4$  metros/segundo
- Masa (Ío):  $8,93 \cdot 10^{22}$  kilogramos
- Radio orbital perihelio (Ganímedes):  $1,7 \cdot 10^9$  metros
- Velocidad Orbital perihelio (Ganímedes):  $1,09 \cdot 10^4$  metros/segundo
- Masa (Ganímedes):  $1,48 \cdot 10^{23}$  kilogramos
- Radio orbital perihelio (Calisto):  $1,87 \cdot 10^9$  metros
- Velocidad Orbital perihelio (Calisto):  $8,27 \cdot 10^3$  metros/segundo
- Masa (Calisto):  $1,08 \cdot 10^{23}$  kilogramos

### **Altura y acimut:**

Para definir la posición de un cuerpo estelar en el cielo se utilizan las coordenadas celestes. Estos son un conjunto de valores que, dependiendo del sistema de referencia, dan la posición de un objeto en el cielo. Estableciendo como centro el observador, las coordenadas reciben el nombre de altura y acimut (coordenadas horizontales). La altura representa el ángulo en el que se sitúa el objeto respecto al horizonte dentro del arco que barre desde el horizonte hasta el cénit. El acimut representa el ángulo en el que se sitúa el objeto respecto al norte o sur del cuerpo.

### **Sir Isaac Newton**

Sir Isaac Newton, sin duda una de las mentes más brillantes entre los físicos y matemáticos, es conocido por la invención del cálculo diferencial e infinitesimal, los primeros trabajos acerca de la luz y la óptica. A su vez Newton describe en su obra culmen del pensamiento moderno (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687) la ley de gravitación universal junto con sus tres famosas leyes. Newton describió la gravedad como una fuerza y con una elegante fórmula explicó uno de los fenómenos más importantes del universo observable. Esta ley se formula de la siguiente manera:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [1]$$

En esta ecuación tenemos una constante, a saber, la Constante de Gravitación Universal ( $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{Kg}^2$ ). Además, tenemos tres variables: la masa de ambos cuerpos y la distancia entre ambos, también conocida como radio orbital.

La segunda ley de Newton pertenece a las 3 leyes de la dinámica presentadas por él mismo en el mismo libro. Esta ley enuncia que *“El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz externa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime”*, Se describe por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad [2]$$

Siendo  $m$  la masa del cuerpo correspondiente y  $\vec{a}$  la aceleración de este provocada al aplicar la fuerza  $\vec{F}$ .

**Abstract**

The main purpose of this project is to determine analytically the different positions of Jupiter and the Galilean satellites in the sky of Europa from the perspective of an observer and analyse the results. To accomplish this the project has two different parts, the first one is the development of a spreadsheet in which those positions will be calculated, and the analysis of the data obtained. The positions of the observed objects will be calculated applying the pertinent physical and mathematical formulae.

# Objetivo

El objetivo de este proyecto es determinar analíticamente la posición de Júpiter y el resto de los satélites galileanos desde la superficie de Europa. Crear gráficas con los valores de la altitud de estos cuerpos en el cielo de Europa. Reflejar numéricamente cómo la rotación sincrónica de Europa afecta al movimiento de Júpiter en su bóveda celeste. Analizar la posibilidad de eclipses entre los satélites y Europa.

## Descripción de la metodología:

### **Órbita:**

A través de la hoja de cálculo, aplicando las ecuaciones pertinentes se calculan cada uno de los componentes necesarios para determinar la posición en función del tiempo de la órbita de Europa.

El primer paso es calcular la fuerza gravitatoria (calculada a partir de la expresión [1]) que ejerce Júpiter sobre Europa. Después, a partir de la expresión [2] se despeja la aceleración que genera esa fuerza. Con este último dato, aplicando la fórmula de la velocidad para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se calcula la velocidad de Europa. Con estos dos datos sustituyendo en la fórmula de la posición para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se obtiene la posición en función del tiempo del Europa.

### **Rotación de un punto de la superficie:**

El punto en el que se sitúa el observador en Europa está en movimiento debido a la rotación del satélite. Ese movimiento se describe de la forma de un movimiento circular uniforme. Conociendo el periodo de rotación se despeja la velocidad angular de rotación, con esto último aplicando la fórmula de la posición para el movimiento rectilíneo uniforme, se obtiene la posición en función del tiempo.

### **Altura del cuerpo observado:**

La altitud del cuerpo observado es el ángulo formado entre el vector de la superficie de Europa y el vector resultado de la suma del vector superficie y el vector posición de Europa. Por ello, despejando el ángulo formado entre ambos vectores se halla la posición del cuerpo observado

# Desarrollo:

Para poder determinar la posición de estos cuerpos se ha utilizado la hoja de cálculo de Microsoft Excel aplicando las leyes de Newton y las matemáticas de las que dispongo. Partiendo del siguiente esquema se obtiene una idea clara de todos los vectores que juegan un papel en una órbita:

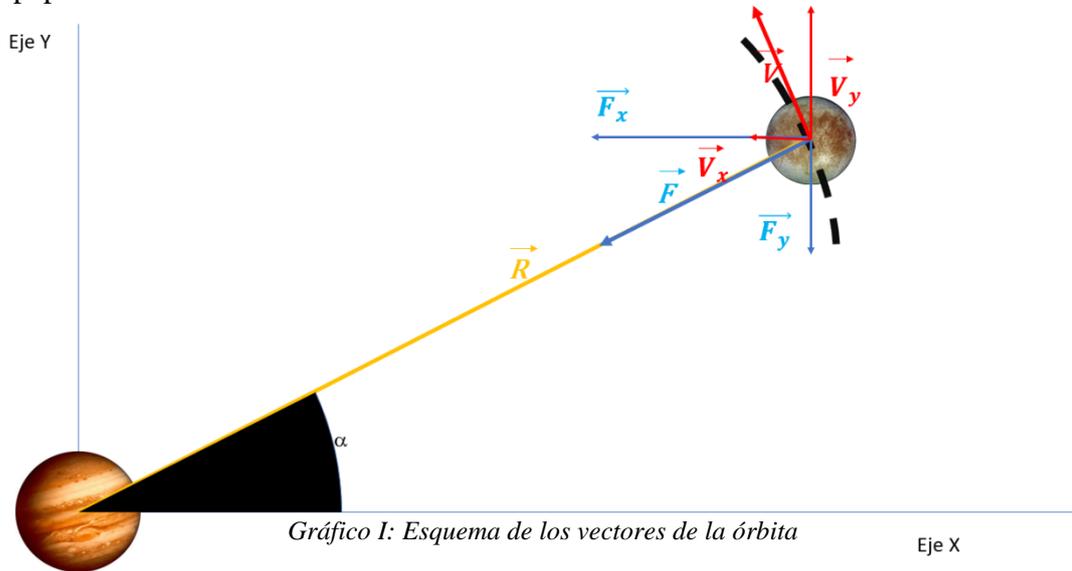


Gráfico I: Esquema de los vectores de la órbita

Como se puede observar en la imagen los vectores están descompuestos en los 2 ejes para facilitar la definición de la órbita sobre el plano. En las órbitas, partiendo de los datos orbitales (masa, radio orbital, velocidad orbital, masa del cuerpo sobre el que orbita) se pueden obtener cada uno de los vectores que se observan en la imagen aplicando las ecuaciones necesarias y la trigonometría.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	G	6,67E-11	Período (s)	3,07E+05										
2	Rorbital (m)	6,71E+08	Aceleración	-2,81E-01										
3	Vorbital	1,37E+04	$F_g$	1,35E+22										
4	T (s)	7,00E+01												
5	Meuropa	4,80E+22												
6	Mjúpiter	1,90E+27												
7														
8	t	R	Rx	Ry	V	Vx	Vy	A	Ax	Ay	F	Fx	Fy	$\alpha$
9	0,00E+00	6,71E+08	6,71E+08	0,00E+00	1,37E+04	0,00E+00	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	0,00E+00	-1,35E+22	-1,35E+22	0,00E+00	0
10	7,00E+01	6,71E+08	6,71E+08	9,62E+05	1,37E+04	-1,97E+01	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-4,03E-04	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,94E+19	0,0014336
11	1,40E+02	6,71E+08	6,71E+08	1,92E+06	1,37E+04	-3,94E+01	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-8,06E-04	-1,35E+22	-1,35E+22	-3,87E+19	0,0028672
12	2,10E+02	6,71E+08	6,71E+08	2,89E+06	1,37E+04	-5,91E+01	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-1,21E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-5,81E+19	0,0043008
13	2,80E+02	6,71E+08	6,71E+08	3,85E+06	1,37E+04	-7,88E+01	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-1,61E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-7,74E+19	0,0057344
14	3,50E+02	6,71E+08	6,71E+08	4,81E+06	1,37E+04	-9,84E+01	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-2,02E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-9,68E+19	0,007168
15	4,20E+02	6,71E+08	6,71E+08	5,77E+06	1,37E+04	-1,18E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-2,42E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,16E+20	0,0086016
16	4,90E+02	6,71E+08	6,71E+08	6,73E+06	1,37E+04	-1,38E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-2,82E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,35E+20	0,01003521
17	5,60E+02	6,71E+08	6,71E+08	7,69E+06	1,37E+04	-1,58E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-3,23E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,55E+20	0,01146882
18	6,30E+02	6,71E+08	6,71E+08	8,66E+06	1,37E+04	-1,77E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-3,63E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,74E+20	0,01290243
19	7,00E+02	6,71E+08	6,71E+08	9,62E+06	1,37E+04	-1,97E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-4,03E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-1,94E+20	0,01433604
20	7,70E+02	6,71E+08	6,71E+08	1,06E+07	1,37E+04	-2,17E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-4,44E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-2,13E+20	0,01576965
21	8,40E+02	6,71E+08	6,71E+08	1,15E+07	1,37E+04	-2,36E+02	1,37E+04	2,81E-01	-2,81E-01	-4,84E-03	-1,35E+22	-1,35E+22	-2,32E+20	0,01720326

Tabla I: Hoja de cálculo utilizada para la órbita de Europa

## Fuerza

Lo primero a despejar en el método que se ha utilizado es la fuerza de la gravedad que actúa sobre el cuerpo. Para ello simplemente sustituyendo en la ecuación de la ley de gravitación de Newton [1] se obtiene la fuerza que ejerce Júpiter sobre el Europa. Esta fuerza se descompone en ambos ejes aplicando las siguientes fórmulas.

$$F_y = F * \text{Sen}(\alpha)$$

$$F_x = F * \text{Cos}(\alpha);$$

$$-B\$1*B\$6*B\$5/(C9^2+D9^2)$$

Figura I: Vector Fuerza según la expresión [1] en la hoja de cálculo.

$$-D\$3*\text{COS}(N9)$$

Figura II: Componente X de la fuerza en la hoja de cálculo.

$$-D\$3*\text{SENO}(N9)$$

Figura III: Componente Y de la fuerza en la hoja de cálculo.

t	F	Fx	Fy
0,00E+00	1,35E+22	-1,35E+22	0,00E+00
7,40E+02	1,35E+22	-1,35E+22	-2,05E+20
1,48E+03	1,35E+22	-1,35E+22	-4,09E+20
2,22E+03	1,35E+22	-1,35E+22	-6,14E+20
2,96E+03	1,35E+22	-1,35E+22	-8,18E+20
3,70E+03	1,35E+22	-1,35E+22	-1,02E+21
4,44E+03	1,35E+22	-1,34E+22	-1,23E+21
5,18E+03	1,35E+22	-1,34E+22	-1,43E+21
5,92E+03	1,35E+22	-1,34E+22	-1,63E+21
6,66E+03	1,35E+22	-1,34E+22	-1,84E+21
7,40E+03	1,35E+22	-1,33E+22	-2,04E+21

Tabla II: Fuerza de la gravedad en los primeros 7400 segundos de órbita.

## Aceleración

A partir de ahí, se despeja la aceleración desde la ecuación de la segunda ley de Newton.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad [3]$$

$$\alpha_x = \frac{F_x}{m}$$

$$\alpha_y = \frac{F_y}{m}$$

K9/B\$5

Figura IV: Vector Aceleración según la expresión [3] en la hoja de cálculo.

L9/B\$5

Figura V: Componente X de la aceleración en la hoja de cálculo

M9/B\$5

Figura VI: Componente Y de la aceleración en la hoja de cálculo

t	A	Ax	Ay
0,00E+00	2,81E-01	-2,81E-01	0,00E+00
7,40E+02	2,81E-01	-2,81E-01	-4,26E-03
1,48E+03	2,81E-01	-2,81E-01	-8,52E-03
2,22E+03	2,81E-01	-2,81E-01	-1,28E-02
2,96E+03	2,81E-01	-2,81E-01	-1,70E-02
3,70E+03	2,81E-01	-2,80E-01	-2,13E-02
4,44E+03	2,81E-01	-2,80E-01	-2,55E-02
5,18E+03	2,81E-01	-2,80E-01	-2,98E-02
5,92E+03	2,81E-01	-2,79E-01	-3,40E-02
6,66E+03	2,81E-01	-2,79E-01	-3,83E-02
7,40E+03	2,81E-01	-2,78E-01	-4,25E-02

Tabla III: Aceleración de Europa en los primeros 7400 segundos de órbita

## Velocidad

El siguiente paso es calcular la velocidad. Para ello se aplica la ecuación de la velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} * t$$

$$V_x = V_0 + \alpha_x * t$$

$$V_y = V_0 + \alpha_y * t$$

F9+I9\*B\$4

Figura VII: Componente X de la Velocidad en la hoja de cálculo

G9+J9\*B\$4

Figura VIII: Componente Y de la Velocidad en la hoja de cálculo

t	V	Vx	Vy
0,00E+00	1,37E+04	0,00E+00	1,37E+04
7,40E+02	1,37E+04	-2,08E+02	1,37E+04
1,48E+03	1,37E+04	-4,16E+02	1,37E+04
2,22E+03	1,37E+04	-6,24E+02	1,37E+04
2,96E+03	1,37E+04	-8,32E+02	1,37E+04
3,70E+03	1,37E+04	-1,04E+03	1,37E+04
4,44E+03	1,37E+04	-1,25E+03	1,37E+04
5,18E+03	1,38E+04	-1,45E+03	1,37E+04
5,92E+03	1,38E+04	-1,66E+03	1,37E+04
6,66E+03	1,38E+04	-1,87E+03	1,36E+04
7,40E+03	1,38E+04	-2,07E+03	1,36E+04

Tabla IV: Velocidad de Europa en los primeros 7400 segundos de órbita

## Posición

Después, partiendo de la ecuación de la posición en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se obtiene:

$$\vec{R} = x_0 + \vec{V} * t + \frac{1}{2} \vec{a} * t^2$$

$$R_y = R_{0y} + V_y * t + \frac{1}{2} \alpha_y * t^2$$

$$R_x = R_{0x} + V_x * t + \frac{1}{2} \alpha_x * t^2$$

$$C9+F9*B\$4+(1/2)*I9*B\$4^2$$

Figura IX: Componente X de la posición en la hoja de cálculo

$$D9+G9*B\$4+(1/2)*J9*B\$4^2$$

Figura X: Componente Y de la posición en la hoja de cálculo

t	R	Rx	Ry
0,00E+00	6,71E+08	6,71E+08	0,00E+00
7,40E+02	6,71E+08	6,71E+08	1,02E+07
1,48E+03	6,71E+08	6,71E+08	2,03E+07
2,22E+03	6,71E+08	6,70E+08	3,05E+07
2,96E+03	6,71E+08	6,70E+08	4,07E+07
3,70E+03	6,71E+08	6,69E+08	5,08E+07
4,44E+03	6,71E+08	6,68E+08	6,09E+07
5,18E+03	6,71E+08	6,67E+08	7,11E+07
5,92E+03	6,71E+08	6,66E+08	8,12E+07
6,66E+03	6,71E+08	6,65E+08	9,13E+07
7,40E+03	6,71E+08	6,63E+08	1,01E+08

Tabla V: Posición de Europa en los primeros 7400 segundos de órbita

### Ángulo ( $\alpha$ )

Para finalizar hay que calcular ( $\alpha$ ), que es el ángulo que forma el vector posición ( $\vec{R}$ ) con el eje horizontal. Una vez más, aplicando la trigonometría podemos calcular este ángulo con la siguiente fórmula:

$$\text{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

Debido a que la función arcotangente tiene 2 soluciones y la hoja de cálculo solo devuelve una de ellas hay que “arreglar” la ecuación para poder obtener el resultado necesario para definir la órbita. Para esto se utiliza la función de condicional de la hoja de cálculo, de forma que si  $\vec{R}_x > 0$  entonces la hoja de cálculo utilice la expresión anterior, sin embargo, para  $\vec{R}_x < 0$  le añadimos a la expresión anterior una fase ( $\pi$ ). Así, se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) \text{ si } \vec{R}_x > 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) + \pi \text{ si } \vec{R}_x < 0 \end{cases}$$

$$\text{SI}(C9>0;\text{ATAN}(D9/C9);\text{PI}()+\text{ATAN}(D9/C9))$$

Figura XI: Expresión de cálculo de ( $\alpha$ ) en la hoja de cálculo.

t	$\alpha$
0,00E+00	0
7,40E+02	0,01515574
1,48E+03	0,03031322
2,22E+03	0,04547243
2,96E+03	0,06063336
3,70E+03	0,07579601
4,44E+03	0,09096036
5,18E+03	0,1061264
5,92E+03	0,12129412
6,66E+03	0,1364635
7,40E+03	0,15163453

Tabla VI: Ángulo formado entre Europa y el eje horizontal en los primeros 740 segundos



Se obtiene así el ángulo  $\varphi$  con el cual aplicando trigonometría se calculan las posiciones en los 2 ejes.

$$\varphi_x = R * \text{Cos}(\varphi)$$

$$\varphi_y = R * \text{Sen}(\varphi)$$

$$B\$1*\text{COS}(B9)$$

Figura XII: Expresión de la posición de un punto de la superficie en X en la hoja de cálculo

$$B\$1*\text{SENO}(B9)$$

Figura XIII: Expresión de la posición de un punto de la superficie en Y en la hoja de cálculo

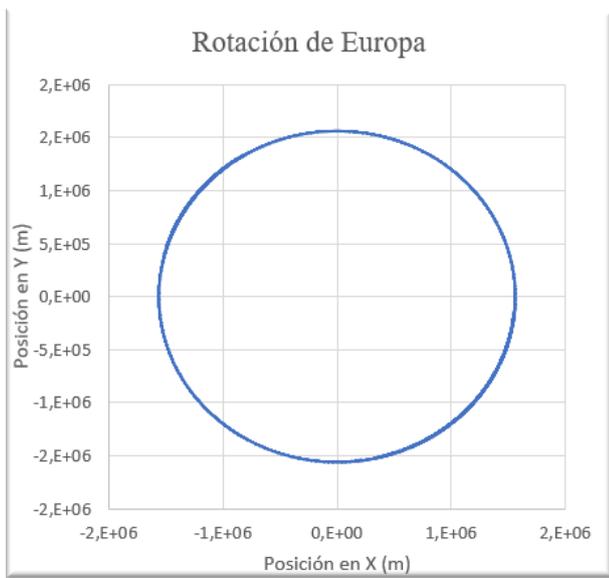


Gráfico III: Rotación de Europa

t (s)	$\phi$	$X_{\text{sup}}$	$Y_{\text{sup}}$
0,00E+00	3,14	-1,56E+06	1,91E-10
7,40E+02	3,16	-1,56E+06	-2,36E+04
1,48E+03	3,17	-1,56E+06	-4,73E+04
2,22E+03	3,19	-1,56E+06	-7,09E+04
2,96E+03	3,20	-1,56E+06	-9,45E+04
3,70E+03	3,22	-1,56E+06	-1,18E+05
4,44E+03	3,23	-1,55E+06	-1,42E+05
5,18E+03	3,25	-1,55E+06	-1,65E+05
5,92E+03	3,26	-1,55E+06	-1,89E+05
6,66E+03	3,28	-1,55E+06	-2,12E+05
7,40E+03	3,29	-1,54E+06	-2,36E+05

Tabla VIII: Puntos de la superficie en la hoja de cálculo

## Altitud y acimut

En astronomía se utilizan la altitud y acimut, que son aquellas coordenadas que dependen de la posición del observador, para determinar la posición de los diferentes cuerpos celestes. Obviamente debido al movimiento del cuerpo del observador estas coordenadas varían con el tiempo. Debido a que se trabaja sobre el plano, el acimut, que es el ángulo medido en el horizonte celeste que forman el norte y la proyección vertical del astro sobre el horizonte, no es necesaria. Sin embargo, la altitud es el ángulo del arco vertical que barre desde el horizonte hasta el cénit en el que se encuentra el astro.

En el siguiente gráfico puede observarse mejor:

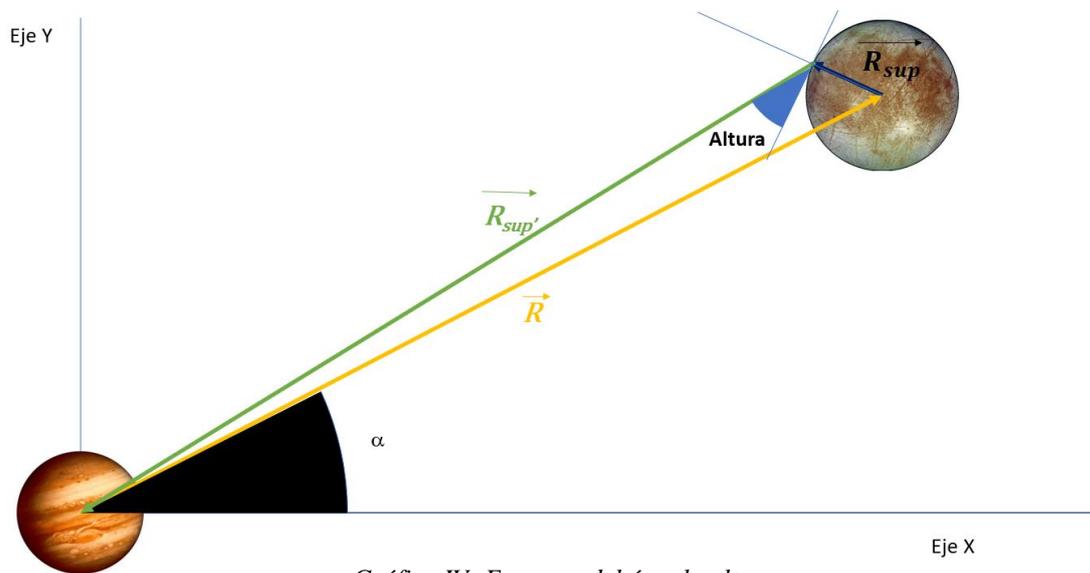


Gráfico IV: Esquema del ángulo altura

t	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	R <sub>supx</sub>	R <sub>supy</sub>	R <sub>supx</sub> '	R <sub>supy</sub> '	R <sub>sup</sub>	R <sub>sup</sub> '	R <sub>sup</sub>	Altura <sub>JUP</sub>	Altura <sub>JUP</sub> <sup>o</sup>
0,00E+00	6,65E+08	0,00E+00	-1,10E+06	1,10E+06	6,64E+08	1,10E+06	663759265	1560800	7,87E-01	45,0952674	
7,00E+01	6,65E+08	9,70E+05	-1,11E+06	1,10E+06	6,64E+08	2,07E+06	663759301	1560800	7,87E-01	45,0967827	
1,40E+02	6,65E+08	1,94E+06	-1,11E+06	1,10E+06	6,64E+08	3,04E+06	663759350	1560800	7,87E-01	45,0982981	
2,10E+02	6,65E+08	2,91E+06	-1,11E+06	1,10E+06	6,64E+08	4,01E+06	663759412	1560800	7,87E-01	45,0998135	
2,80E+02	6,65E+08	3,88E+06	-1,11E+06	1,10E+06	6,64E+08	4,98E+06	663759488	1560800	7,87E-01	45,101329	
3,50E+02	6,65E+08	4,85E+06	-1,11E+06	1,10E+06	6,64E+08	5,95E+06	663759576	1560800	7,87E-01	45,1028446	
4,20E+02	6,65E+08	5,82E+06	-1,11E+06	1,09E+06	6,64E+08	6,92E+06	663759678	1560800	7,87E-01	45,1043603	
4,90E+02	6,65E+08	6,79E+06	-1,11E+06	1,09E+06	6,64E+08	7,89E+06	663759793	1560800	7,87E-01	45,105876	
5,60E+02	6,65E+08	7,76E+06	-1,12E+06	1,09E+06	6,64E+08	8,85E+06	663759921	1560800	7,87E-01	45,1073918	
6,30E+02	6,65E+08	8,73E+06	-1,12E+06	1,09E+06	6,64E+08	9,82E+06	663760062	1560800	7,87E-01	45,1089076	
7,00E+02	6,65E+08	9,70E+06	-1,12E+06	1,09E+06	6,64E+08	1,08E+07	663760217	1560800	7,87E-01	45,1104235	
7,70E+02	6,65E+08	1,07E+07	-1,12E+06	1,09E+06	6,64E+08	1,18E+07	663760385	1560800	7,87E-01	45,1119395	
8,40E+02	6,65E+08	1,16E+07	-1,12E+06	1,08E+06	6,64E+08	1,27E+07	663760566	1560800	7,87E-01	45,1134555	
9,10E+02	6,65E+08	1,26E+07	-1,12E+06	1,08E+06	6,64E+08	1,37E+07	663760760	1560800	7,87E-01	45,1149715	
9,80E+02	6,65E+08	1,36E+07	-1,13E+06	1,08E+06	6,64E+08	1,47E+07	663760967	1560800	7,87E-01	45,1164876	
1,05E+03	6,65E+08	1,46E+07	-1,13E+06	1,08E+06	6,64E+08	1,56E+07	663761188	1560800	7,87E-01	45,1180038	

Tabla IX: Hoja de cálculo utilizada para el cálculo de la altura de Júpiter

En la tabla anterior se pueden observar los vectores del gráfico anterior y sus componentes en x e y. Estos vectores son los calculados previamente tanto en la definición de la órbita como en los puntos de la superficie. El vector que se debe calcular es  $\overrightarrow{R_{sup}'}$ , se calcula a través de las componentes x e y del mismo vector, a saber:

$$\vec{R}_{supx'} = \overrightarrow{R_{supx}} + \vec{R}_x \quad ; \quad \overrightarrow{R_{supx}'} = \overrightarrow{R_{supx}} + \vec{R}_x;$$

B9+D9      C9+E9

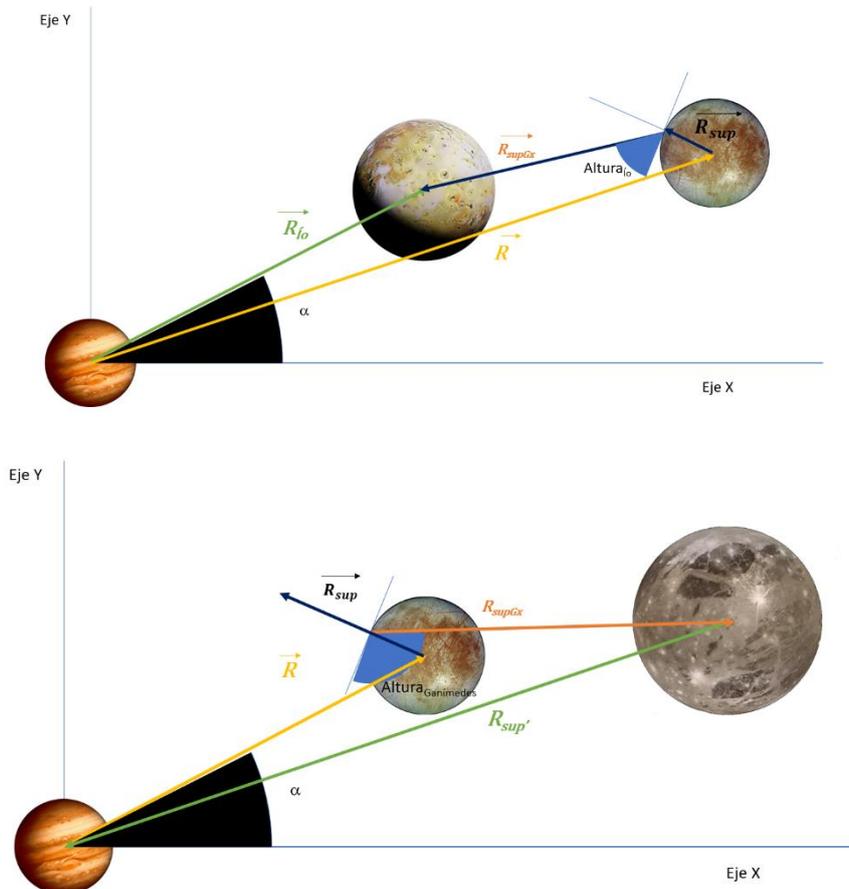
Figura XIV: Expresiones de las componentes x e y del vector  $R_{sup}$  en la hoja de cálculo.

Se despeja el ángulo de la altitud a partir del ángulo formado entre  $\overrightarrow{R_{sup}'}$  y  $\overrightarrow{R_{sup}}$ . Una vez más aplicando trigonometría se obtiene la siguiente expresión:

$$Altitud = \pi - \text{Arcos}\left(\frac{\overrightarrow{R_{sup}'} \cdot \overrightarrow{R_{sup}}}{\|R_{sup}\| \|R_{sup}'\|}\right)$$

PI()-ACOS(((F9\*D9+G9\*E9)/(H9\*I9)))

Figura XV: Fórmula de la altitud de Júpiter en la hoja de cálculo



Gráficos V y VI: Esquema del cálculo de la altura para los satélites cuya órbita es interior (V) y exterior (VI) con respecto a la órbita de Europa.

### Resultados y conclusiones:

En la hoja de cálculo aplicando todo lo explicado en la metodología con respecto a las órbitas se obtienen los diversos gráficos de posiciones orbitales. En el siguiente gráfico se pueden observar las trayectorias descritas por los satélites galileanos en el tiempo que Europa da una vuelta alrededor de Júpiter:

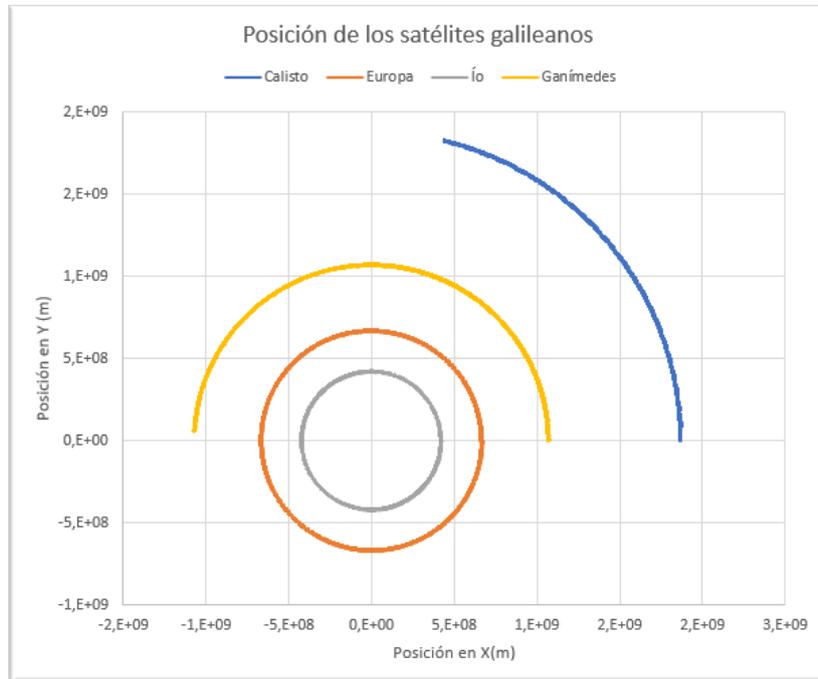
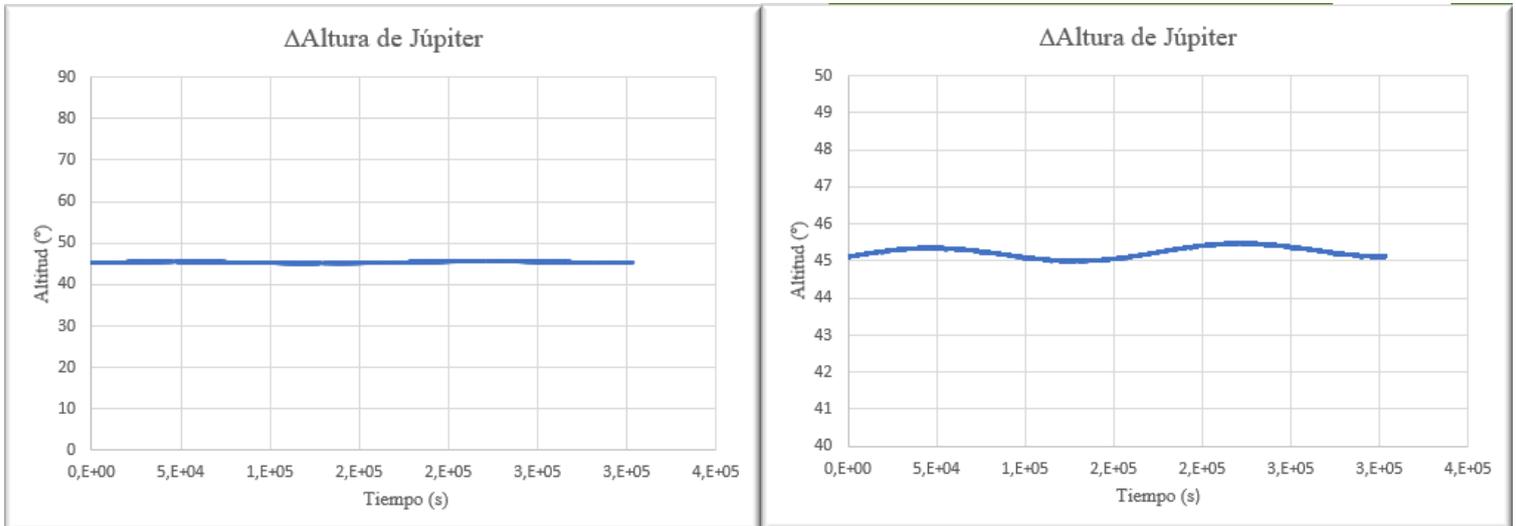


Gráfico VII: Trayectorias descritas por los satélites galileanos durante el periodo orbital de Europa

Aunque no se aprecie en el gráfico anterior, en ese tiempo Ío ha completado 2 orbitas. Queda reflejada la resonancia de Laplace. Además, se aprecia como la excentricidad de todas las órbitas es mínima, de ahí el carácter circular de la elipse.

A partir de la metodología utilizada aplicada a la hoja de cálculo, se han obtenido las siguientes gráficas con la variación de la altura de Júpiter a lo largo de una órbita completa de Europa en la posición del meridiano 135°:



Gráficos VIII y IX: Variación en la altura de Júpiter a lo largo de la órbita situados en el meridiano 135°

Como se puede observar en la gráfica, la altura de Júpiter apenas varía a lo largo del periodo de Europa. Esto se debe a que Europa, presenta una rotación sincrónica, lo que indica que el periodo orbital (tiempo en completar una órbita) y el periodo de rotación (tiempo en rotar sobre su propio eje) son iguales. Esto implica que Júpiter apenas describe un movimiento en el cielo de Europa, la pequeña variación observada es debido al carácter elíptico de la órbita. Este fenómeno se encuentra en casi todos los satélites naturales del sistema solar, siendo el ejemplo más cercano la Luna, que siempre se encuentra orientada hacia la Tierra por la misma cara. En la siguiente imagen puede observarse mejor esta pequeña variación debido a la excentricidad de la órbita.

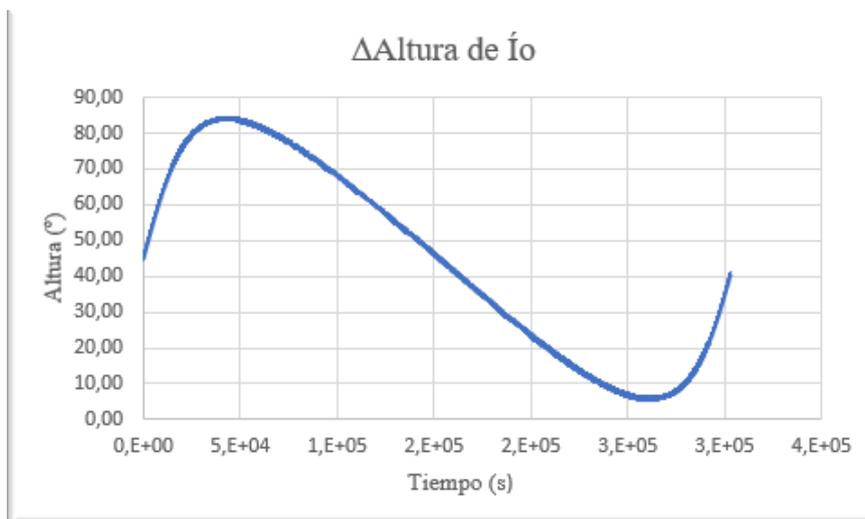
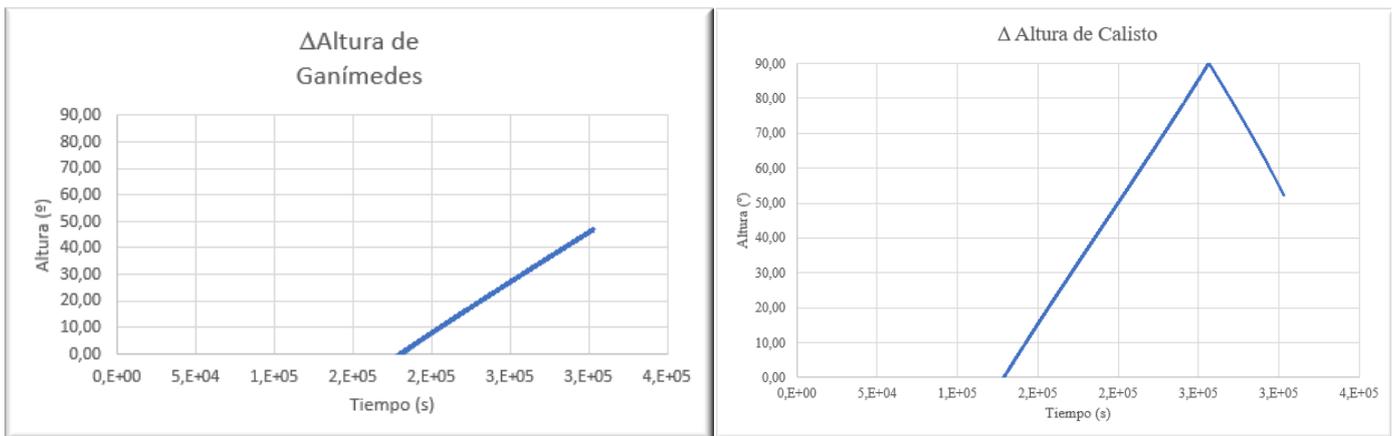


Gráfico X: Variación en la altura de Ío a lo largo de la órbita situándose en el meridiano 135°

En el gráfico anterior se puede apreciar una peculiar curva en la variación de la altura de Ío. Esta curva se debe a la velocidad orbital de Ío, que al ser mas rápida hace que se cruce en un momento dado entre Europa y Júpiter. Se puede observar como al principio Ío se encuentra entre Júpiter y Europa, pero la segunda vez que en la gráfica cruza los 45° es Júpiter el que se encuentra entre Europa e Ío. En ese punto Europa se encontrará cerca de la mitad de la órbita mientras que Ío habrá completado su primera vuelta. Por último, la tercera vez que esto ocurra será cuando Europa haya completado su primera órbita e Ío haya completado su segunda, volviendo al estado inicial.



Gráficos XI y XII: Variaciones en las alturas de Calisto y Ganímedes a lo largo de la órbita situándose en el meridiano 135°

Por el contrario, Europa se encuentra entre Ganímedes y Calisto. Por esta razón, no se pueden observar desde el meridiano 135° al comenzar la órbita. Sin embargo, una vez la órbita ha avanzado lo suficiente, ambos astros son visibles desde Europa. Ganímedes y Calisto también cruzan los 45° de altura, en ese momento se encontrarán ocultos detrás de Júpiter debido a que sus órbitas son exteriores con respecto a la de Europa.

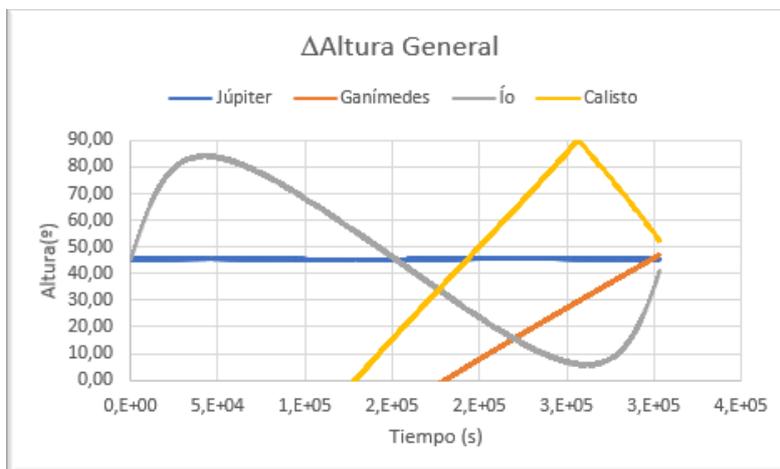


Gráfico XIII: Variaciones de altura de todos los cuerpos desde el meridiano 135°

Variando la posición del observador sobre la superficie de Europa del meridiano 135° al meridiano 0° se obtiene la siguiente gráfica:

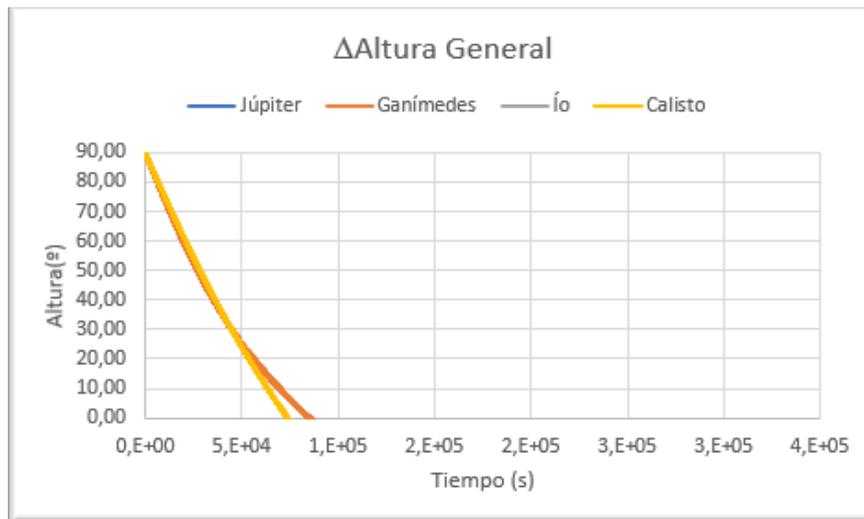


Gráfico XIV: Variaciones de la altura de todos los cuerpos desde el meridiano 0°

En este caso, el observador se encuentra orientado en la dirección contraria a Júpiter. Debido a esto, como muestra la gráfica, Júpiter e Ío no son visibles desde este meridiano. Por el contrario Ganímedes y Calisto si son observables al primer momento, aunque, debido a que la velocidad orbital de Europa es mayor, ambos dejan de ser observables a medida que Europa avanza en su órbita.

Finalmente puede concluirse que la observación de Júpiter y los satélites galileanos desde Europa depende del meridiano en el que el observador se sitúe. En el primer caso (meridiano 135°) se llegan a poder ver los 4 cuerpos a la vez en algún momento, sin embargo, en el segundo caso (meridiano 0°) solo son observables Ío y Ganímedes, aunque durante un corto periodo de tiempo. También puede deducirse que cuando las gráficas de altura se cruzan entre sí el observador experimentará como uno de los dos cuerpos que observa se oculta momentáneamente detrás del otro.

## **Bibliografía:**

Documentos:

[1] El cielo de la Luna- Álvaro Morales

Páginas web:

[2] Wikipedia. Europa (Satélite). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Europa\\_\(sat%C3%A9lite\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Europa_(sat%C3%A9lite))

[3] Wikipedia. Júpiter (planeta). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/J%C3%BApiter\\_\(planeta\)](https://es.wikipedia.org/wiki/J%C3%BApiter_(planeta))

[4] Wikipedia. Satélite Galileano. Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Sat%C3%A9lite\\_galileano](https://es.wikipedia.org/wiki/Sat%C3%A9lite_galileano)

[5] Wikipedia. Ío (satélite). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Do\\_\(sat%C3%A9lite\)](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Do_(sat%C3%A9lite))

[6] Wikipedia. Ganímedes (satélite). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Ganimedes\\_\(sat%C3%A9lite\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Ganimedes_(sat%C3%A9lite))

[7] Wikipedia. Calisto (satélite). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Calisto\\_\(sat%C3%A9lite\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Calisto_(sat%C3%A9lite))

[8]Astrofísica y Física. Vamos a mercurio para ver un doble amanecer. Obtenido de

<https://www.astrofisicayfisica.com/2013/02/vamos-mercurio-para-ver-un-doble.html>

[9] Wikipedia. Altura (Astronomía). Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Altura\\_\(astronom%C3%ADa\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Altura_(astronom%C3%ADa))

[10] Wikipedia. Acimut. Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/Acimut>

[11] Wikipedia. Isaac Newton. Obtenido de [https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)

[12] Wikipedia. Urbain Le Verrier. Obtenido de

[https://es.wikipedia.org/wiki/Urbain\\_Le\\_Verrier](https://es.wikipedia.org/wiki/Urbain_Le_Verrier)

[13]Astronomia-iniciación. Urbain Jean Joseph Le Verrier. Obtenido de

<https://www.astronomia-iniciacion.com/urbain-jean-joseph-le-verrier.html>

[14]El Mundo. 1846. El descubrimiento de Neptuno. Obtenido de <https://www.elmundo.es/elmundo/2009/06/15/ciencia/1245064953.html>

[15] Wikipedia. Resonancia de Laplace. [https://es.wikipedia.org/wiki/Resonancia\\_de\\_Laplace](https://es.wikipedia.org/wiki/Resonancia_de_Laplace)

[16] Biografías y vidas. Johannes Kepler. Obtenido de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kepler.htm>

[17] Wikipedia. Leyes de Newton. Obtenido de [https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes\\_de\\_Newton](https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton)

Libros:

[18] Física 2 Bachillerato. Editorial Edebé.

[19] Principios matemáticos de la Filosofía Natural. Editorial Tecnos. Isaac Newton

[20] Física y Química 4 Eso. Editorial SM.